ENS de Lyon
Master 1 Mathématiques 2016-2017

Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

Corrigé TD 1 : Introduction, premier et second moment

1 Exercice 1

1. Être un arbre : non monotone
2. Être une forêt : décroissante
3. Contenir une copie du carré C_4 : croissante
4. Avoir une composante connexe de taille $\leq C$ pour $C > 0$: décroissante
5. Avoir un chemin induit de longueur 5 : non monotone
6. Contenir un graphe stable induit de taille 10 : décroissante
7. Être eulérien : non monotone

2 Exercice 2

1. $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}(X>0)] &\leq \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}(X>0)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}(X>0).\end{aligned}$$

   Où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On déduit facilement l'inégalité demandée : $\mathbb{P}(X=0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$.
2. Bienaymé-Tchébychev donne $\mathbb{P}(X=0) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1$, ce qui est une borne plus faible. En pratique on montre que $\mathbb{E}[X^2] \sim \mathbb{E}[X]^2$, ce qui implique que les deux bornes en question tendent vers 0 et donc que $X \neq 0$ avec grande probabilité.
3. Par Bienaymé-Tchebychev,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\right| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - \left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right)^2\right| \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\operatorname{Var}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1\right),\end{aligned}$$

   qui tend vers 0.

3 Exercice 3

Soit Z le nombre de triangles. On a $\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{3}p^3$ donc si $p = o(1/n)$, $\mathbb{E}[Z] \to 0$ et donc $\mathbb{P}(Z > 0) \to 0$ par l'inégalité de Markov.

Pour $np \to \infty$, on doit alors considérer le second moment. On considère les paires de triangles, que l'on regroupe par le cardinal de leur intersection (3 pour le premier terme, 2 pour le second, 1 ou 0 pour le troisième).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{T_1,T_2} \mathbb{P}(T_1 \in G, T_2 \in G) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{4}\binom{4}{2}2p^5 + \left(\binom{n}{3}^2 - \binom{n}{3} - \binom{n}{4}\binom{4}{2}2\right)p^6.\end{aligned}$$

Le premier terme est un $O(n^3p^3)$, le suivant un $O(n^4p^5)$ et le troisième est $\leq \mathbb{E}[Z]^2$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \leq O(n^3p^3) + O(n^4p^5).$$

Mais comme $\mathbb{E}[Z]^{-2} = O((np)^{-6})$,

$$\frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} \leq O((np)^{-3}) + O(n^{-1}(np)^{-1}) = o(1).$$

On a donc $\mathbb{E}[Z^2] \sim \mathbb{E}[Z]^2$, ce qui permet d'appliquer la méthode du second moment pour montrer que $Z > 0$ avec grande proba.

4 Exercice 4

1. $\mathrm{diam}(G_{n,p}) > 2$ si et seulement si il existe $x \neq y \in [n]$ tels que $x \not\sim y$ et pour tout $z \in [n]$, $z \not\sim x$ ou $z \not\sim y$.
2. Soit Z le nombre de tels paires de sommets (mauvaises paires).

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)(1-p^2)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)\exp(-(n-2)(p^2 + o(p^2))).$$

On déduit que si $p \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$, $\mathbb{E}[Z] \to 0$, donc $Z = 0$ avec grande probabilité.

Réciproquement, si $p \leq (1-\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$, $\mathbb{E}[Z] \to \infty$, et on doit regarder le second moment.

La somme ci-dessous sera découpée selon la taille de l'intersection $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_1<y_1,\, x_2<y_2} \mathbb{P}((x_1,y_1) \text{ et } (x_2,y_2) \text{ mauvaises paires}) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{3}\binom{3}{2}(1-p)^2(1-p^3-2p^2)^{n-3} + \mathbb{E}[Z]^2\left(1 - \frac{\binom{2}{n} + \binom{n}{3}\binom{2}{3}}{\binom{n}{2}^2}\right) \\ &= \mathbb{E}[Z]^2 + o(\mathbb{E}[Z]^2).\end{aligned}$$

La méthode du second moment donne alors que $Z > 0$ avec grande proba.

5 Exercice 5

La loi du degré d'un sommet uniforme (comme celle d'un sommet fixe) dans $G_{n,p}$ est une binomiale de paramètres $n-1$ et p.

Dans $G_{n,m}$

$$\mathbb{P}(\deg(x) = k) = \mathbb{P}(\deg(1) = k) = \frac{\binom{k}{n-1}\binom{\binom{n}{2}-n+1}{m-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}.$$

C'est la loi hypergéométrique de paramètres $(\binom{n}{2}, m, n-1)$. La loi hypergéométrique de paramètres (N, r, t) est la loi du nombre de boules rouges tirées quand on tire sans remise t boules parmi un ensemble de N boules dont r sont rouges.

6 Exercice 6

1. Majorer $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ par n^k et minorer $k!$ par $(k/e)^k$ suffit. La première inégalité est triviale, la deuxième vient de $k^k/k! \leq e^k$.
2. Il suffit de montrer que

$$\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}.$$

La borne supérieure provient de l'application de l'inégalité $1 + x \leq e^x$ à chaque facteur du produit. Pour la borne inférieure, on prend le logarithme.

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) = \sum_{i=0}^{k-1}\log(1 - \frac{i}{n}) &\geq \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\frac{i}{n}}{\frac{k-1}{n}}\log\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{k}{2}\log\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),\end{aligned}$$

où pour l'inégalité on a utilisé le fait que le logarithme, fonction concave, est au dessus de sa corde entre $1 - \frac{k-1}{n}$ et 1. On conclut avec l'inégalite de Bernoulli $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

On déduit que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ est vrai non seulement pour k fixé mais aussi pour $k = o(\sqrt{n})$. On a en fait montré, sous la même condition, que $n(n-1)\cdots(n-k) \sim n^k$.

7 Exercice 7

1. Soit Z le nombre de stables induits de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \sum_{A\subset[n],|A|=\lceil \frac{n}{2k}\rceil} \mathbb{P}(A \text{ induit un stable}) \\ &= \binom{n}{\lceil \frac{n}{2k}\rceil}(1-p)^{\binom{\lceil \frac{n}{2k}\rceil}{2}} \\ &\leq \left(\frac{ne}{\frac{n}{2k}}\right)^{\frac{n}{2k}+1}(1-n^{1/g-1})^{n^2} = (2ke)^n e^{-n^2 n^{1/g-1}} = (2ke)^n e^{-n^{1+1/g}} = o(1).\end{aligned}$$

   On a utilisé l'Exercice 6.1 puis l'inégalité $(1+x) \leq e^x$. Ensuite l'inégalité de Markov donne qu'avec grande probabilité il n'y a pas de tel stable.
2. Soit Z le nombre de cycles de longueur a.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \frac{1}{2a}\sum_{x_1,\dots,x_a \text{ distincts}} \mathbb{P}(x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_a \sim x_1) \\ &= \frac{1}{2a}n(n-1)\cdots(n-a+1)p^a \leq \frac{1}{2a}n^{a+a(1/g-1)} = n^{a/g}.\end{aligned}$$

   Donc si Y est le nombre de cycles de longueur $< g$,

$$\mathbb{E}[Y] \leq n^{3/g} + \dots + n^{(g-1)/g} \leq gn^{(g-1)/g}.$$

   On applique l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Y > \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) \leq \frac{gn^{(g-1)/g}}{n/4} = O(n^{-1/g}) = o(1).$$

3. Pour construire G', on part de G et on enlève un sommet dans chaque cycle de longueur $< g$. G' est alors le graphe induit sur les sommets restants. G' ne contient alors plus de cycles de longueur $< g$.
   Maintenant soit X un stable induit de G'. Alors X était déjà un stable induit de G. Donc

$$|X| \leq \left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lceil n/2 \rceil}{k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil.$$

4. Si G' est k-colorable, on regarde la couleur qui contient le plus de sommets. L'ensemble de ses sommets induit un stable, de taille au moins $\left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil$. Absurde.

8 Exercice 8

1. Soit Z le nombre de copies de K_4, le graphe complet à 4 sommets.

$$\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{4}p^6 \asymp n^4p^6.$$

On a donc que pour $p = o(n^{-2/3})$, $\mathbb{P}(Z \geq 1) \leq \mathbb{E}[Z] = o(1)$, donc aucune copie de K_4 avec grande proba. On regarde le second moment en supposant $pn^{2/3} \to \infty$:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{A,B \subset [n],\, |A|=|B|=4} \mathbb{P}(A, B \text{ induisent } K_4).$$

On sépare selon le cardinal de $A \cup B$: $|A \cup B| \in \{4,5,6\}$, ou $\in \{7,8\}$:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \binom{n}{4}p^6 + 20\binom{n}{5}p^9 + 90\binom{n}{6}p^{11} + \left(\binom{n}{4}^2 - 20\binom{n}{5} - 90\binom{n}{6}\right)p^{12}.$$

Le dernier terme est majoré par $\mathbb{E}[Z]^2$. On déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} &= O(n^{-4}p^{-6} + n^{-3}p^{-3} + n^{-2}p^{-1}) \\ &= O((pn^{2/3})^{-6} + p^{3/2}(pn^{2/3})^{-9/2} + p^2(pn^{2/3})^{-3}) = o(1).\end{aligned}$$

Ceci permet d'appliquer la méthode du second moment et de montrer que le seuil est $n^{-2/3}$.

2. (a) Le nombre de sommets qui appartient à 2 triangles différents est borné par le nombre de copies du graphes "noeud papillon" $\bowtie$, plus deux fois le nombre de copies du graphe "losange" $\Leftrightarrow$. Soit Z cette quantité.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1)\dots(n-4)}{|\mathrm{Aut}(\bowtie)|}p^6 + 2\frac{n(n-1)\dots(n-3)}{|\mathrm{Aut}(\Leftrightarrow)|}p^5 = O(n^5/n^6 + n^4/n^5) = o(1).$$

D'où le résultat par la méthode du premier moment.

(b) Soit Z le nombre de chemins induits de taille $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{2}p^k(1-p)^{\binom{k+1}{2}-k} \sim \frac{n^{k+1}}{2}(c/n)^k \times 1 \asymp nc^k.$$

Où on a utilisé l'Exercice 6 pour l'équivalent de la factorielle tombante. En tout cas on a montré que $\mathbb{E}[Z] \to \infty$. Passons au second moment.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_0,\dots,x_k,y_0,\dots,y_k} \mathbb{P}(x_0, \dots x_k, y_0, \dots, y_k \text{ chemins induits}) \\ &\leq \mathbb{E}[Z]^2 + \sum_{x_0,\dots,x_k,y_0,\dots,y_k, \text{avec des arêtes en commun}} p^{2k - \#\{\text{arêtes en commun}\}}.\end{aligned}$$

On a séparé les termes où les deux chemins sont disjoints, dont la somme est classiquement majoré par $\mathbb{E}[Z^2]$. Pour le reste, on a majoré brutalement : on compte maintenant des chemins non induits, et on a majoré le facteur en $(1-p)$ par 1. Maintenant pour $j \geq 1$, on pose $N_{k,j}$ le nombre de couples de chemins de taille k qui ont j arêtes en commun. On majore très brutalement $N_{k,j}$ par le nombre d'ensembles de $2k+1-j$ points, décorés par suites de longueur $k+1$ (vérifier que c'est légitime !).

$$N_{k,j} \leq n^{2k+1-j}(2k+1-j)^{2k+2} \leq n^{2k+1-j}(3k)^{3k},$$

et, en conséquence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \leq \sum_{j=1}^{k} N_{k,j} p^{2k-j} &\leq \sum_{j=1}^{k} n^{2(k+1-j)}(3k)^{3k} p^{2k-j} \\ &\leq kn(3k)^{3k} c^{2k} = o(n^2) = o(\mathbb{E}[Z]^2).\end{aligned}$$

On peut donc appliquer la méthode du second moment.

(c) Soit Z le nombre de sommets de degré $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \sum_{x \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k) \\ &= n\,\mathbb{P}(\mathrm{Bi}(n-1,p) = k) \\ &= n\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &\sim n\frac{(n-1)^k}{k!}\frac{c^k}{n^k}(1-c/n)^{n-1-k} \\ &\sim \frac{nc^k e^{-c}}{k!} \to \infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x,y \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k, \deg(y) = k) \\ &= \mathbb{E}[Z] + n(n-1) \\ &\quad \times \left(p\left(\tbinom{n-2}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-k}\right)^2 + (1-p)\left(\left(\tbinom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}\right)^2\right)\right) \\ &= \mathbb{E}[Z] + n^2 p \frac{n^{2k-2}}{k!^2} p^{2k-2}(1-p)^{2n-2-2k}(1+o(1)) \\ &\quad + n^2(1-p)\frac{n^{2k}}{k!^2} p^{2k}(1-p)^{2n-4-2k}(1+o(1)) \\ &= \mathbb{E}[Z] + p\,\mathbb{E}[Z]^2(1+o(1)) + \mathbb{E}[Z]^2(1+o(1)).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont des $o(\mathbb{E}[Z]^2)$, le troisième est $\sim \mathbb{E}[Z]^2$. On peut donc appliquer la méthode du second moment.